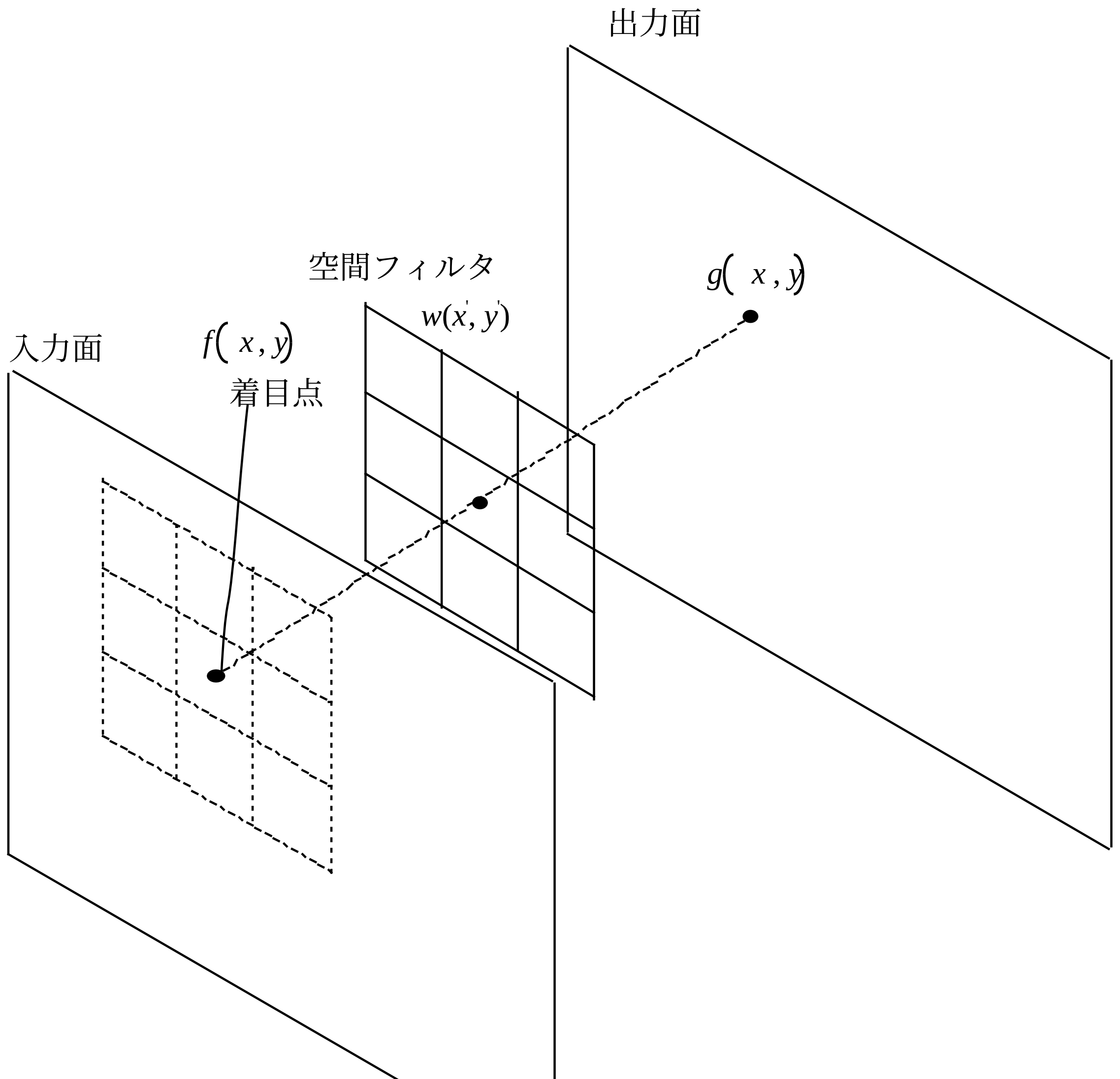
情報システム特論資料-5　　　　　　　　　　　　　　　　　大島正毅

局所オペレータ（ローカルオペレータ、近傍オペレータ、空間フィルタ、窓演算）



局所オペレータの一般形は

$$g(x, y) = \sum_{\Delta x, \Delta y \;\; A} w(\Delta x, \Delta y)\, f(x + \Delta x, y + \Delta y)$$

$$= \sum_{i} w_i\, f(x + \Delta x_i, y + \Delta y_i)$$

と表わすことができ、画像処理の基本的・重要な操作である。

種々の局所オペレータ

0	0	0
0	1	0
0	0	0

nothingオペレータ（中心のみ1、他は0よって、出力=入力）　δ関数の近似

1	1	1
1	1	1
1	1	1

平均化（近傍平均、空間平滑化）オペレータ

0	0	0
-1	1	0
0	0	0

Δ_x

0	-1	0
0	1	0
0	0	0

Δ_y

差分オペレータ

$\Delta_x = f(x, y) - f(x-1, y)$　　$\Delta_y = f(x, y) - f(x, y-1)$

0	0	0
0	1	0
-1	0	0

Δ_1

0	0	0
0	1	0
0	0	-1

Δ_2

Robertsオペレータ

-1	0	1
-1	0	1
-1	0	1

Δ_x

-1	-1	-1
0	0	0
1	1	1

Δ_y

Prewittオペレータ(微分したい方向と直交方向に平滑化する）

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

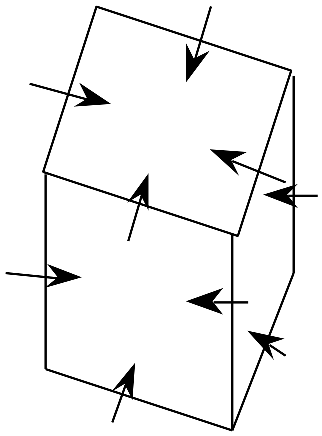
Δ_x

-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

Δ_y

Sobelオペレータ（Prewittオペレータの平滑時に重みを付けている）

グラディエント（勾配）



明るさ変化の概念図
（暗い方から明るい方へ向う）

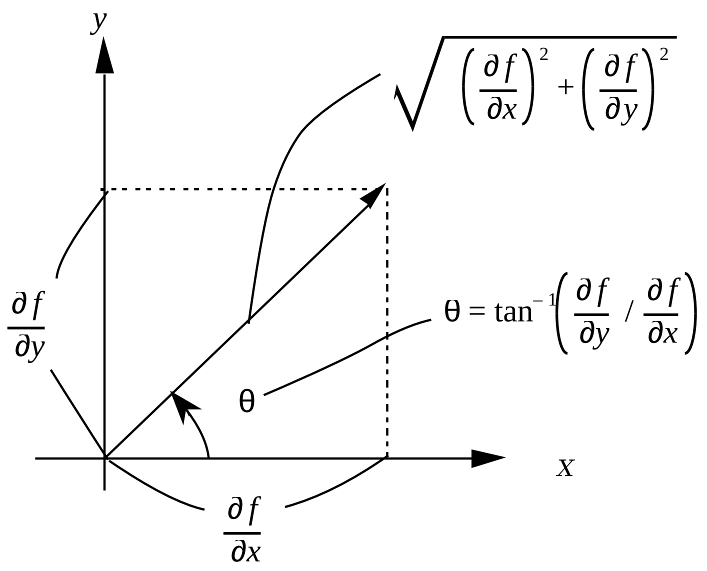
ある点に着目するとき、その点の周りの明るさがどのように変化しているかを調べたい。どの方向にどの位変化しているか知りたい。明るさ変化のx、y成分を考える。そのため、

$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$なるものを求め、これをグラディエントと呼ぶ。グラディエントはベクトルで、大きさと方向を持つ。

グラディアントは大きさが$\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$　で与えられ、向きがθで与えられるベクトルである。

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial y} / \frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

グラディエントはエッジの抽出に用いられる。その大きさが（閾値より）大きい点だけを（２値画像として）出力すれば、エッジ点（と呼ぶ）が得られる。明るさの変化する方向も得られるので、同一エッジ上にある点をグループ化するのにも使える。



回転による明るさの変化

座標系をθだけ回転させたときの座標系をx', y'とする。この座標系でのグラディエントは$\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x'}\\ \frac{\partial f}{\partial y'}\end{pmatrix}$と書ける。

（計算のポイント　合成関数の偏微分　x,yの関数をx'やy'で偏微分するときx', y'による偏微分をx, yの関数として表したい：

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'}$$
$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y'}$$

上式と（座標系の回転で扱った）以前の式から

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta$$
$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y'} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial x}(-\sin\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta$$

と書ける。

$\frac{\partial f}{\partial x'}$はθなる座標変換を施したときの明るさの$x$方向変化率、θを種々変化させてこの値を調べれば着目点の周りの明るさ変化率の分布が分かる。

その極値を与えるθ_mは

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial f}{\partial x'}=0$$ の解で与えられる。よって

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta\right)=0$$

$$-\frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta_m+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta_m=0$$ （$\frac{\partial f}{\partial x}\neq 0$とする。必要の場合別途考察）

$$\sin\theta_m=\left(\frac{\partial f}{\partial y}/\frac{\partial f}{\partial x}\right)\cos\theta_m$$

$$\tan\theta_m=\frac{\partial f}{\partial y}/\frac{\partial f}{\partial x}$$ よって

$$\theta_m=\tan^{-1}\left(\frac{\partial f}{\partial y}/\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$ （参考　atan2関数）

$$\cos\theta_m=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta_m}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)/\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right)^2}}$$

$$=\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

$$\sin\theta_m=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta_m}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)/\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right)^2}}$$

$$=\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

$\frac{\partial f}{\partial x'}$ の最大値は

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta_m+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta_m$$

$$=\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right\}/\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}$$

グラディエントは明るさ変化最大の方向とその大きさに対応している。$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$（$\Delta_x, \Delta_y$と表わすことがある）はディジタル画像では差分で近似する。グラディエントの大きさをエッジ強度とよぶことがある。エッジ強度にはほかに次のような尺度もある：

$|\Delta_x|+|\Delta_y|$、$\max\left(|\Delta_x|, |\Delta_y|\right)$

参考　atan2関数

```
# include <stdio.h>
# include <math.h>

main()
{
	double th, x, y, ans;
	double pai = 3.14159;
	for (th =0.0 ; th < 2.0 ; th += 0.25){
		x = cos(th*pai);
		y = sin(th*pai);
		ans = atan2(y , x) / pai;
		printf("th= %f , x= %f , y= %f , ans= %f \ n",th,x,y,ans);
	}
}
```

```
kdsub1_oshima127% cc atn.c -lm
kdsub1_oshima128% a.out
th= 0.000000 , x= 1.000000 , y= 0.000000 , ans= 0.000000
th= 0.250000 , x= 0.707107 , y= 0.707106 , ans= 0.250000
th= 0.500000 , x= 0.000001 , y= 1.000000 , ans= 0.500000
th= 0.750000 , x= -0.707105 , y= 0.707108 , ans= 0.750000
th= 1.000000 , x= -1.000000 , y= 0.000003 , ans= 1.000000
th= 1.250000 , x= -0.707109 , y= -0.707104 , ans= -0.750002
th= 1.500000 , x= -0.000004 , y= -1.000000 , ans= -0.500002
th= 1.750000 , x= 0.707103 , y= -0.707110 , ans= -0.250002
```

$atan\ 2$を用いるとxが0となる場合（$\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$）も特別の処理をしなくとも正しく$\theta$を求めることができる。

グラディエント値の回転不変性

先に導いた式

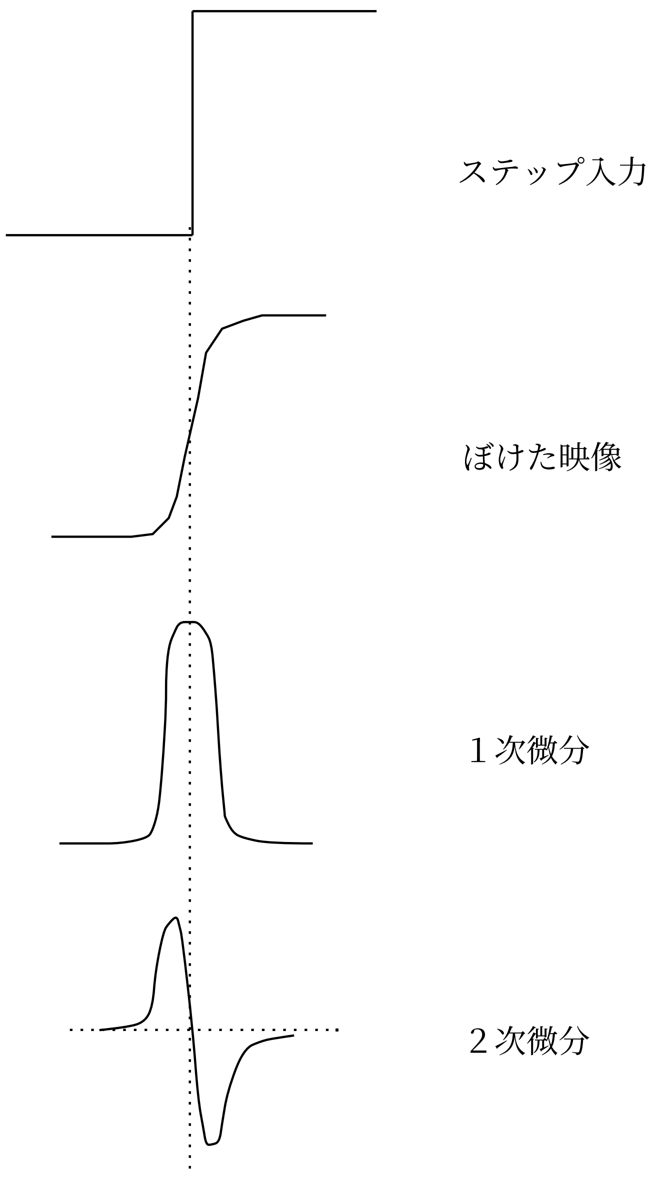
$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin\theta$$
$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial x} \left(-\sin\theta\right) + \frac{\partial f}{\partial y} \cos\theta$$

から回転後のグラディエントは

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)^2$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cos\theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin\theta\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \left(-\sin\theta\right) + \frac{\partial f}{\partial y} \cos\theta\right)^2$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \cos^2\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sin^2\theta + 2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} \sin\theta\cos\theta$$
$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sin^2\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \cos^2\theta - 2\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} \sin\theta\cos\theta$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

これは回転前と回転後で同じ値になることを示している。このような、回転に対して値が変わらない操作（オペレータ）を回転不変（rotation invariant）オペレータという。

１次微分と２次微分



１次微分は $\frac{\partial}{\partial x}$，$\frac{\partial}{\partial y}$ で表わされ、それを Δ_x，Δ_y で表わすことがある。

２次微分は $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ で表わされ、これを $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ で表わすことがある。ぼけた画像からそのラプラシアン結果（に係数を掛けたもの）を引くとぼけが補正される。また、非最大値抑制（後述）に代えてラプラシアン結果のゼロクロッシングが用いられることがある。

用語について（一松　信　解析学序説による（p.140））：

関数 f に対する外微分を $df = \sum_{i=1}^{3} \left({}^{\partial f}/_{\partial x_i} \right) dx_i$ とし、これにあたるベクトルを勾配ベクトル場といって grad f で表す。これを　f とも書く。　はナブラ（昔の竪琴の名前という）とよぶ。div（発散）も　で表し、div (grad f) = Δf によってラプラシアン Δ を ∇^2 と書くこともある。

演習　ラプラシアン演算 $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$ の差分近似

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$
$$= f(x+1, y) - 4f(x, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1)$$

を示せ。

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

ラプラシアンオペレータ

演習

$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$　（ラプラシアンオペレータ）の回転不変性を示せ