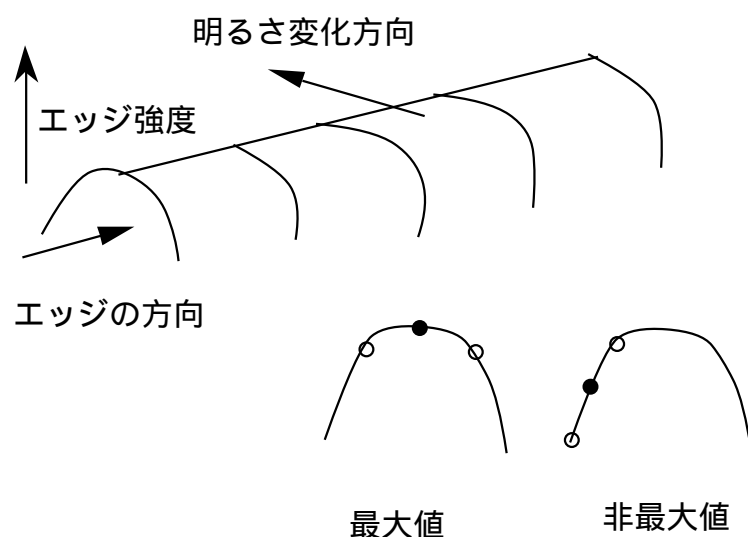


1 次微分を行って、エッジ強度の大きい点と取出すと、物理的なエッジに相当する場所だけでなくその近くに幅（峰）ができる（幅を0にしようとして、閾値を大きくすると、エッジが消えてしまう部分が出る）。そのため、その中の尾根に相当する点を選び出さないとエッジに相当する点は得られない。

その方法として：

ある点について明るさの変化方向を見つけ（エッジオペレータでできる）、その方向に沿って自分の両隣とも自分より小さいか同じ（自分がピークである）以外の場合は0にする。これを非最大値抑制という。

エッジ位置では2次微分が0になる（0クロスまたは0交差するという）ので、エッジ強度大かつ2次微分が0になる点を求めることによって尾根を見つけることができる。



局所オペレーター一般形の意味

$f(x, y)$ と原点近傍で定義される $w(x, y)$ とから

$$g(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(x - x^c, y - y^c) w(x^c, y^c) dx^c dy^c \quad (1) \text{ を定義する。 } w(x, y) \text{ は原点近傍}$$

で定義されるから $-D_x \leq x^c \leq D_x, -D_y \leq y^c \leq D_y$ と書ける。これより

$$g(x, y) = \int_{-Dy}^{Dy} \int_{-Dx}^{Dx} f(x - x^c, y - y^c) w(x^c, y^c) dx^c dy^c$$

ここで、 $w(x^c, y^c) = w^c(-x^c, -y^c)$, $x^{cc} = -x^c, y^{cc} = -y^c$ と置くと

$$g(x, y) = \int_{-Dy}^{Dy} \int_{-Dx}^{Dx} f(x + x^{cc}, y + y^{cc}) w^c(x^{cc}, y^{cc}) dx^{cc} dy^{cc} \quad \text{これを離散形で書くと}$$

$$g(x, y) = \sum_{x^{cc}, y^{cc} \in A} f(x + x^{cc}, y + y^{cc}) w^c(x^{cc}, y^{cc}) \quad (2) \text{ただし } x^{cc}, y^{cc} \in A \text{は近傍を表す。}$$

コンボリューション

$$x \text{の関数 } f_1(x), f_2(x) \text{について } \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x') f_2(x - x') dx' \quad (\text{または } \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) f_2(x - y) dy)$$

の形式の積分を f_1 と f_2 のコンボリューション (重畳積分、畳み込み) という。これは x の関数であり、

$$f(x) = f_1(x) * f_2(x) \text{と書く。}$$

上の(2)は窓演算に相当する演算を表している。これは(1)と実質的に同じである。すなわち窓演算はコンボリューションと実質同じである (変数の符号を除いて)。

演算順序の変更

$$f_2(x) * f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x') f_1(x - x') dx' \quad x'' = x - x' \text{とおくと } (x' = x - x'' \text{ (} x \text{は定数扱い)}), \\ dx' = -dx'', \text{ 積分範囲は逆となるが結果は同じ)}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x - x'') f_1(x'') dx''$$

$$= f_1(x) * f_2(x) \quad (\text{コンボリューションは順序によらない (可換の法則)})$$

よって

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x') f_2(x - x') dx' = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x - x') f_2(x') dx' \quad \text{と書ける。}$$

複合演算の順序変更

$$F = f_3(x) * \{ f_2(x) * f_1(x) \}$$

を考える。

$$= f_3(x) * \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x') f_2(x - x') dx' \right\}$$

後半は x の関数である。

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_3(x'') \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x') f_2(x - x') dx' \right\} dx''$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_3(x'') \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x') f_2((x - x'') - x') dx' \right\} dx'' \quad \text{積分順序を変更して}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x') \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_3(x'') f_2((x-x') - x'') dx'' \right\} dx' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x') \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f_3(x'') f_2((x-x') - x'') dx'' \right\} dx' \quad x-x' \text{は積分変数} x'' \text{にとって定数。後半は} \\
&f_3(x) * f_2(x) \text{で} x = x-x' \text{と置いたものに等しい。よって}
\end{aligned}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x') \left\{ f_3(x) * f_2(x) \right\} \Big|_{x=x-x'} dx' \quad \text{定義からこれは前半と後半のコンボリューション。}$$

$$\begin{aligned}
F &= f_1(x) * \left\{ f_3(x) * f_2(x) \right\} && \text{前後を逆にしても同じだから} \\
&= \left\{ f_3(x) * f_2(x) \right\} * f_1(x)
\end{aligned}$$

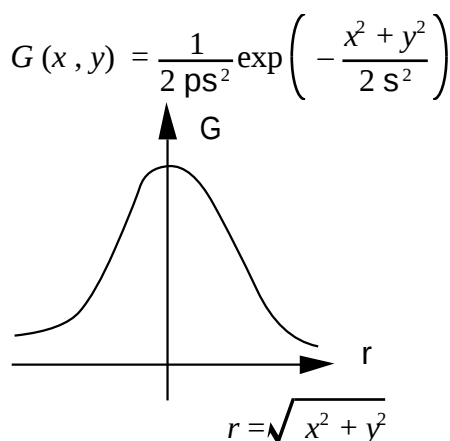
以上から（最初と最後から）

$$f_3(x) * \left\{ f_2(x) * f_1(x) \right\} = \left\{ f_3(x) * f_2(x) \right\} * f_1(x) \quad (\text{結合の法則})$$

画像 f_1 にオペレータ f_2 を施した後、さらにオペレータ f_3 を施すのは、あらかじめオペレータ f_2 にオペレータ f_3 を施して結果を得て、それを1つのオペレータとして画像 f_1 に施すのと等価である。

ガウス型ラプラシアンオペレータ（Gaussian Laplacian）

画像の中の対象によって扱うエッジをぼかしたいことがある。ぼかすための関数としてガウス関数が好まれている。ガウス関数はシグマ を変えることによってぼけの程度を制御できる。



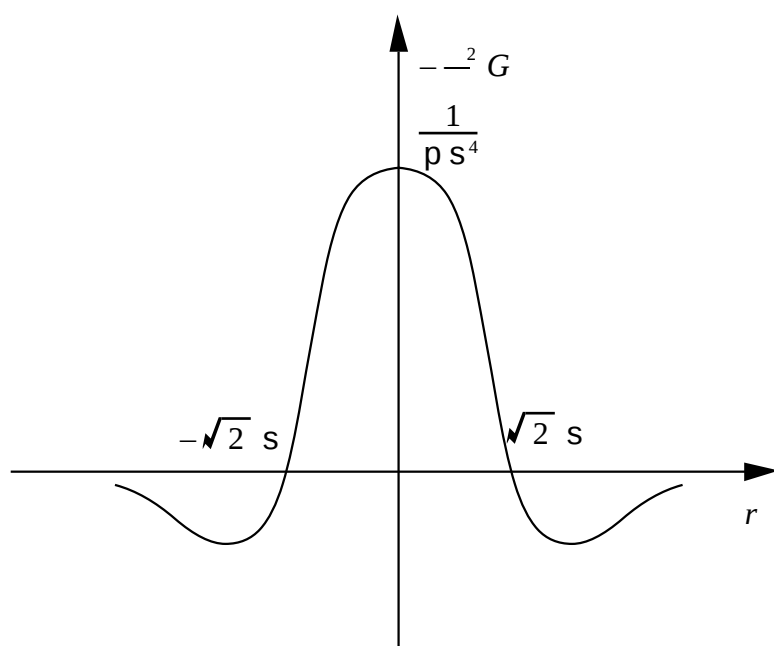
先に述べたように局所オペレータの順序は変更可能だから

$$^2 \left[G(x, y) * f(x, y) \right] = \left[^2 G(x, y) \right] * f(x, y)$$

すなわち、ガウスオペレータでぼかし演算を行ってから、ラプラシアンを掛けるのと、ぼかしラプラシアン演算を元の画像に掛けるのと同じになる。このオペレータをガウス

型ラプラシアンオペレータという。

$$\begin{aligned}
 & \nabla^2 G(x, y) \\
 &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) G \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} G \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial y} G \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi s^2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(-\frac{2x}{2s^2} \right) \exp \left(-\frac{x^2+y^2}{2s^2} \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(-\frac{2y}{2s^2} \right) \exp \left(-\frac{x^2+y^2}{2s^2} \right) \right\} \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi s^2} \left[\left(-\frac{1}{s^2} \right) \exp(\cdot) - \frac{x}{s^2} \left(-\frac{x}{s^2} \right) \exp(\cdot) + \left(-\frac{1}{s^2} \right) \exp(\cdot) - \frac{y}{s^2} \left(-\frac{y}{s^2} \right) \exp(\cdot) \right] \\
 &= \frac{\exp(\cdot)}{2\pi s^2} \left[-\frac{1}{s^2} + \frac{x^2}{s^4} - \frac{1}{s^2} + \frac{y^2}{s^4} \right] \\
 &= \frac{\exp(\cdot)}{2\pi s^2} \left[-\frac{2}{s^2} + \frac{x^2+y^2}{s^4} \right] \quad \text{[]の外に } -2/s^2 \text{ を、内に } -s^2/2 \text{ を掛けると} \\
 &= -\frac{1}{\pi s^4} \left[1 - \frac{x^2+y^2}{2s^2} \right] \exp \left(-\frac{x^2+y^2}{2s^2} \right) \quad x^2+y^2 = r^2 \text{ と置くと} \\
 &= -\frac{1}{\pi s^4} \left[1 - \frac{r^2}{2s^2} \right] \exp \left(-\frac{r^2}{2s^2} \right)
 \end{aligned}$$



sが大きいと、ぼかしの度合いが大きい（大きな特徴も消える）

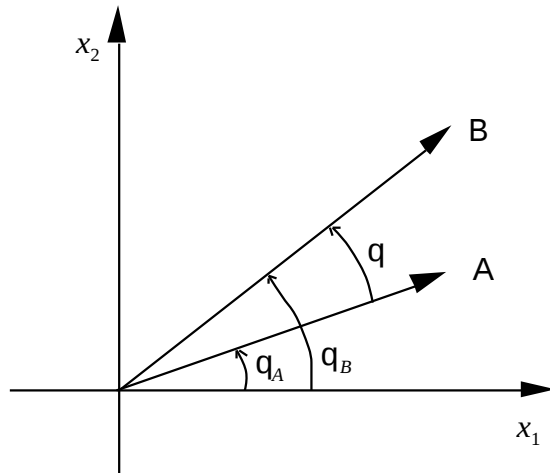
相互相関

内積について

2つのベクトル $\mathbf{a} = (a_1 \ a_2 \dots a_n)^t$, $\mathbf{b} = (b_1 \ b_2 \dots b_n)^t$ について

成分ごとの積の和 (積和) $\sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$ を $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の内積という。

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos q$ と書ける。 $\mathbf{a}$ を $\mathbf{b}$ へ射影 (または $\mathbf{b}$ を $\mathbf{a}$ へ射影) して積を取ったものと理解してもよい。



2つのベクトル $A(x_{1A}, x_{2A})$, $B(x_{1B}, x_{2B})$ を考える。このとき

$$\cos q_A = \frac{x_{1A}}{|A|}, \cos q_B = \frac{x_{1B}}{|B|}, \sin q_A = \frac{x_{2A}}{|A|}, \sin q_B = \frac{x_{2B}}{|B|}$$

$$\begin{aligned} \cos q &= \cos(q_B - q_A) = \cos q_B \cos q_A + \sin q_B \sin q_A \\ &= (x_{1A} x_{1B} + x_{2A} x_{2B}) / (|A| |B|) \\ &= (x_{1A} x_{1B} + x_{2A} x_{2B}) / (\sqrt{x_{1A}^2 + x_{2A}^2} \sqrt{x_{1B}^2 + x_{2B}^2}) \end{aligned}$$

これは2つのベクトルの正規化された内積である。 $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) / (|\mathbf{A}| |\mathbf{B}|)$ と表す。この値は $\cos q$ だから絶対値が0から1の間にある。これを類似度と呼び2つのベクトルの一致度を測るのに用いることができる。一般に2つの多次元ベクトル $\mathbf{f}$, $\mathbf{g}$ について正規化された内積

$$\cos q = \frac{\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}}{|\mathbf{f}| |\mathbf{g}|} = \frac{f_1 g_1 + f_2 g_2 + \dots + f_n g_n}{\sqrt{f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2} \sqrt{g_1^2 + g_2^2 + \dots + g_n^2}}$$

を用いる。(正規化) 相互相関と呼ぶこともある。パターンマッチング (照合)

f_1	f_2	f_3
f_4	f_5	f_6
f_7	f_8	f_9

画像の一部を窓で切り取って、例えばテレビ走査の順に番号付けして各画素の明るさをベクトル要素とみなすことができる。

$f(f_1, f_2, \dots, f_9)$ なるベクトルを考えることができる。もう1つ $t(t_1, t_2, \dots, t_9)$ との間の一致度を $(f \cdot t) / (|f| |t|)$ で測ることができる。このとき t をテンプレートとかモデルパターンとよぶ。

2つのパターンそれぞれについて、各濃度が比例的に変化したものを同一とみなすと大きさ1のベクトル $\frac{f}{|f|}, \frac{t}{|t|}$ を比較すればよい（濃度によらずパターンの一致度だけに着目すると考えてもよい）。このとき、2つのベクトルの角度を q として

$$\cos q = \frac{f \cdot t}{|f| |t|} = \frac{S f t}{\sqrt{S f^2} \sqrt{S t^2}}$$

を一致度とすればよい。ここに小文字の f, t は f_i, t_i を略したものと約束する。また S 等についても同様とする。

この値（の絶対値）は0から1の範囲をとり、パターンが完全一致するときは1となる。尺度として見通しがよい。實際上、テンプレート t は対象とする画像 f に対し小さな範囲で、演算は対象画像 f の上を t をずらしながら一致（不一致）度を各点ごとに計算する。先に説明した近傍演算を行うことになる。比較するとき t は一定だから、 $\sqrt{S t^2}$ は一度だけ計算すればよい。

$$\cos q = \frac{S(f - \bar{f})(t - \bar{t})}{\sqrt{S(f - \bar{f})^2} \sqrt{S(t - \bar{t})^2}} \quad (\bar{f}, \bar{t} \text{ は } f, t \text{ の近傍平均})$$

が用いられることもある。

画像を f 、テンプレートを t とすると、不一致の度合を測るのに次のものが使われることもある：

$$\max |f-t|, S|f-t|, S(f-t)^2$$

これらは大きいほど不一致である（0に近いほどよく一致している）。

（ここで $S(f-t)^2$ は

$$S(f-t)^2 = S f^2 + S t^2 - 2 S f t$$

もし、 $S f^2$ 、 $S t^2$ が一定なら $S f t$ の大小によって $S(f-t)^2$ が定まる。 $S f t (\geq 0)$ が大きい程 $S(f-t)^2$ が小さいから、不一致の度合いが小さい、すなわち一致度が高い。このように、 $S f t$ を一致度の尺度とすることができる（ $S f t$ が大きいほどよく一致）。實際上、 t が固定されているので $S t^2$ は一定であるが、 $S f^2$ は対象とする場所によって異なる。そこで、尺度として

$$\frac{S f t}{\sqrt{S f^2}}$$

を用いる。

（この記述はRosenfeld P306によるが説明に無理が多い。不一致度から出発する必然性がない））

テンプレートに一致するパターンを探すときは、各点ごとに計算するので計算量が多い（テンプレートサイズが大きいときは特に）。これを避けるため、不一致度がある値を越えた点ではそれ以降の計算を打ち切ることも行われる。もっともよく一致する場所やかなりよく一致する場所を探すにはこれで十分である。

一般にこの種のad hocな工夫によって効率を上げる方法をヒューリスティックスといい、人工知能、ビジョン処理ではよく使われる。

パターンマッチングの用途：画像から対象物の位置検出、文字読み取り、ステレオ対応点探索等

参考 ここでは画像のパターンマッチングを取り上げたが、一般にはもっと広い意味がある（音声、文字列など）。

窓演算はコンボルーション計算と実質上同じなので、 $F\{f * g\} = F\{f\}F\{g\}$ より $F^{-1}\{F\{f\}F\{g\}\}$ から $f * g$ を求めることもできる。ただし、 $F\{f\}$ は f のフーリエ変換を表す。フーリエ変換は通常の計算法だと N 個の点について N^2 回の計算が必要なところ、FFTアルゴリズムにより $N \log N$ 回のオーダーですむ。これは N が大きいと有利に働く。このような条件を満たすときにはフーリエ変換を介して窓演算を行うと有利になる可能性がある（特に窓のサイズが大きいとき）。