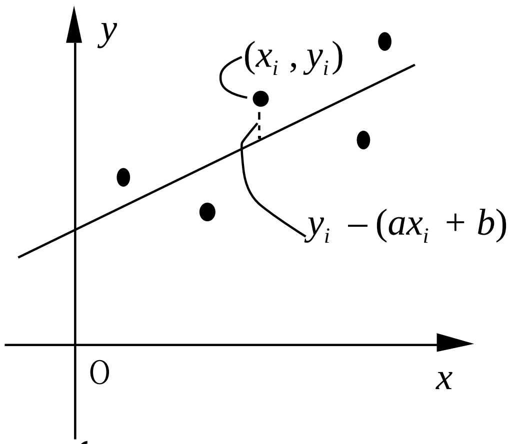
情報システム特論資料-8

大島正毅

最小２乗法



点群$\left\{ (x_1 , y_1),..., (x_i , y_i), ..., (x_N , y_N) \right\}$に直線$y = (ax + b)$をあてはめる。今仮に特定の a,bによってあてはめているとき、(x_i , y_i)におけるずれd_iは

$d_i = y_i - (ax_i + b)$

各点の２乗誤差の和Eは：

$$E = \sum_{i=1}^{N} d_i^2 = \sum_i \left\{ y_i - (ax_i + b) \right\}^2$$

$$= \sum_i \left\{ (ax_i + b)^2 - 2\,(ax_i + b)\, y_i + y_i^2 \right\}$$

E を最小化するため$\dfrac{\partial E}{\partial \mathrm{a}} = 0$, $\dfrac{\partial E}{\partial \mathrm{b}} = 0$ とおくと

$$\frac{\partial E}{\partial \mathrm{a}} = 0 :\ 2 \sum_i (ax_i + b)\, x_i - 2 \sum_i x_i\, y_i = 0$$

$$a\, \Sigma\, x_i^2 + b\, \Sigma\, x_i = \Sigma\, x_i\, y_i$$

$$\frac{\partial E}{\partial \mathrm{b}} = 0 :\ 2 \sum_i (ax_i + b) - 2 \sum_i y_i = 0$$

$$a\, \Sigma\, x_i + b\, \Sigma = \Sigma\, y_i$$

ただし単独のΣは点の個数Nを表わす

これより

$$\begin{pmatrix} \Sigma\, x_i^2 & \Sigma\, x_i \\ \Sigma\, x_i & \Sigma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma\, x_i\, y_i \\ \Sigma\, y_i \end{pmatrix}$$

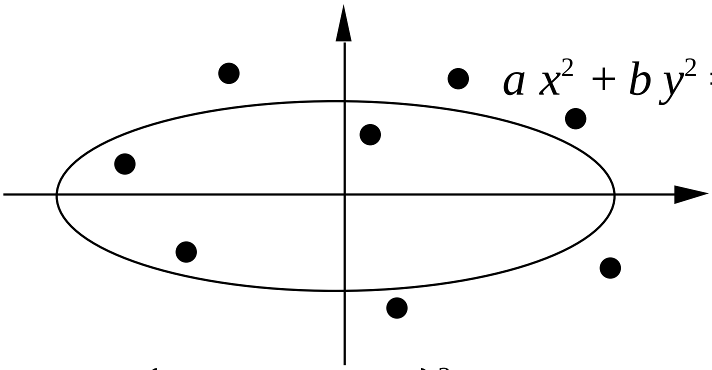
（正規方程式という）

$$D = \begin{vmatrix} \Sigma\, x_i^2 & \Sigma\, x_i \\ \Sigma\, x_i & \Sigma \end{vmatrix}$$

とおいて

$$a = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \Sigma\, x_i\, y_i & \Sigma\, x_i \\ \Sigma\, y_i & \Sigma \end{vmatrix} \quad b = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \Sigma\, x_i^2 & \Sigma\, x_i\, y_i \\ \Sigma\, x_i & \Sigma\, y_i \end{vmatrix}$$

楕円のあてはめ



$$E = \sum_i \left(a\,x_i^2 + b\,y_i^2 - 1 \right)^2$$

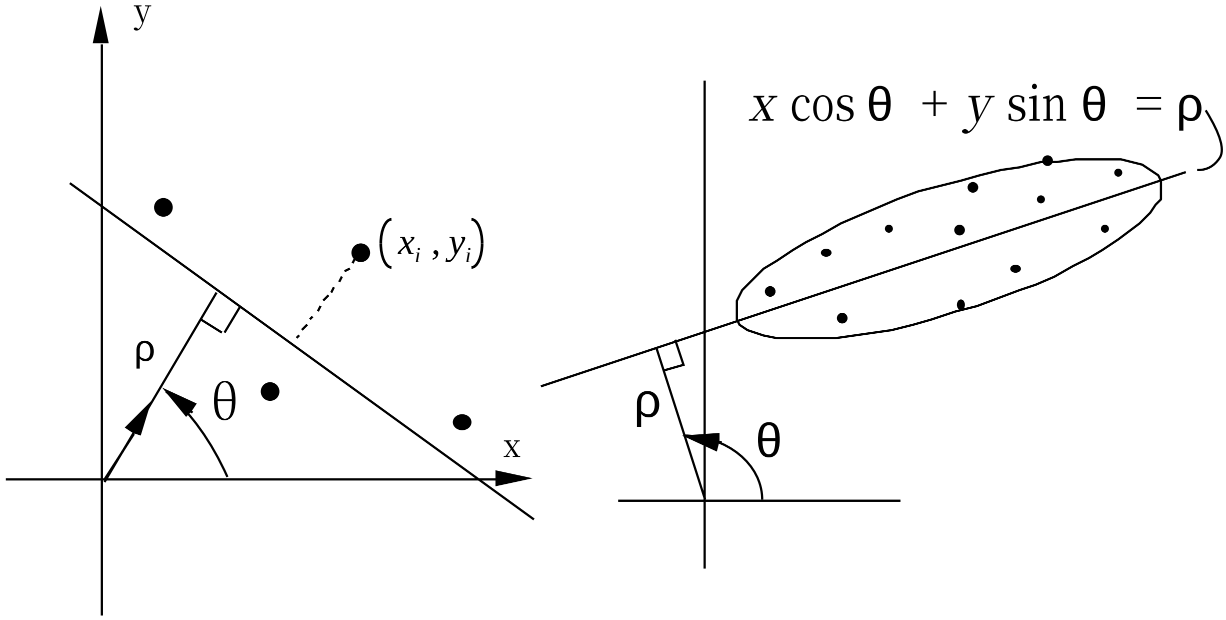
$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0,\ \frac{\partial E}{\partial b} = 0:$$

$$2 \sum_i \left(a\,x_i^2 + b\,y_i^2 - 1 \right) x_i^2 = 0$$

$$2 \sum_i \left(a\,x_i^2 + b\,y_i^2 - 1 \right) y_i^2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^4 & \sum x_i^2\,y_i^2 \\ \sum x_i^2\,y_i^2 & \sum y_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Sigma\,x_i^2 \\ \Sigma\,y_i^2 \end{pmatrix}$$

ρ - θ 形式の直線のあてはめ（主軸のあてはめと実質等価）



点群に一番よく合う直線（主軸）を求める。仮の直線 $x\cos\theta + y\sin\theta = \rho$ があったとして、各点のそこからのずれの２乗和 E で評価すると：

$$E = \sum_i \left(x_i \cos\theta + y_i \sin\theta - \rho \right)^2 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \rho} = 0 : \ 2\sum_i \left(x_i \cos\theta + y_i \sin\theta - \rho \right)\left(-1 \right) = 0$$

$$\left(\sum_i x_i \right) \cos\theta + \left(\sum_i y_i \right) \sin\theta = \rho N$$

$$\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta = \rho \qquad (2)$$

ただし $\dot{x}$ は x の平均を意味する。

この式は求める直線が点群の重心を通ることを意味している。

(2)を(1)に代入して

$$E = \sum_i \left\{ x_i \cos\theta + y_i \sin\theta - \left(\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta \right) \right\}^2$$

$$= \sum_i \left\{ \left(x_i - \dot{x} \right) \cos\theta + \left(y_i - \dot{y} \right) \sin\theta \right\}^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} = 0 :$$

$$\sum_i 2\left\{ \left(x_i - \dot{\boldsymbol{x}} \right) \cos\theta + \left(y_i - \dot{\boldsymbol{y}} \right) \sin\theta \right\}\left\{ -\left(x_i - \dot{\boldsymbol{x}} \right) \sin\theta + \left(y_i - \dot{\boldsymbol{y}} \right) \cos\theta \right\} = 0$$

$$X\,Y \cos^2\theta - X\,Y \sin^2\theta + \left(-X\,X + Y\,Y \right) \sin\theta\cos\theta = 0$$

ただし　$X\,Y = \sum_i \left(x_i - \dot{x} \right) \left(y_i - \dot{y} \right)$

これより

$$X\ Y\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)+\left(-X\ X+Y\ Y\right)\sin\theta\cos\theta=0$$

$$X\ Y\cos2\theta+\left(-X\ X+Y\ Y\right)\frac{\sin2\theta}{2}=0 \qquad (3)$$

$\left(X\ X-Y\ Y\right)\sin2\theta=2\ X\ Y\cos2\theta$ 　　　$\left(X\ X-Y\ Y\right)\cos2\theta\neq0$ と仮定して（$=0$ の場合は別途）、両辺をこれで割ると

$$\tan2\theta=\frac{2\ X\ Y}{X\ X-Y\ Y}$$

$$\theta=\frac{1}{2}arc\tan\frac{2\ X\ Y}{X\ X-Y\ Y} \qquad (4)$$

$arc\tan$ を求めるときは主値（$-\pi/2\leq\theta\leq\pi/2$）を求める。

$\left(X\ X-Y\ Y\right)\cos2\theta=0$ の場合について考える、この場合 $X\ X-Y\ Y=0$ 　または $\cos2\theta=0$

・$X\ X-Y\ Y=0$ のとき、(4)で分母=0に相当するときは、分子の符号によって $\frac{\pi}{2}$ または $-\frac{\pi}{2}$ とするものと約束するなら、(4)にこの場合を含めてよい（θの計算にC言語や、Fortran言語でatan2関数を用いるならこれは自然にできる）。

・$\cos2\theta=0$ のとき　$2\theta=n\pi+\pi/2$ 　このとき、$\sin2\theta=1\ (\neq0)$ 　よって $X\ X-Y\ Y=0$

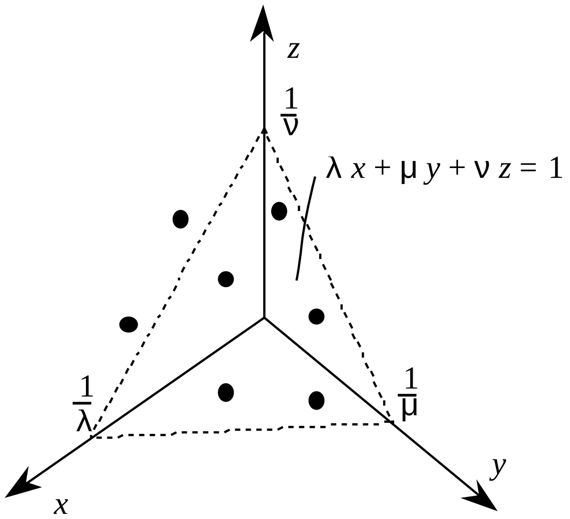
　先ほどのケースに入れられる。

以上により、(4)を形式的に（atan2関数で）求めれば、必要なすべての場合が含まれている。

通常の主軸あてはめでは、

$$\theta'=\frac{1}{2}arc\tan\frac{2\ M\left(1,1\right)}{M\left(0,2\right)-M\left(2,0\right)}$$ と書く。

点群への平面のあてはめ（簡便法）



$$E = \sum_i \left(\lambda\, x_i + \mu\, y_i + \nu\, z_i - 1 \right)^2$$

$$\frac{\partial E}{\partial \lambda} = 0 :\ 2 \sum_i \left(\lambda\, x_i + \mu\, y_i + \nu\, z_i - 1 \right) x_i = 0$$

$$\lambda \sum_i x_i^2 + \mu \sum_i x_i\, y_i + \nu \sum_i x_i\, z_i = \sum_i x_i$$

μ, νについても同様、よって

$$\begin{pmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i\, y_i & \sum x_i\, z_i \\ \sum y_i\, x_i & \sum y_i^2 & \sum y_i\, z_i \\ \sum z_i\, x_i & \sum z_i\, y_i & \sum z_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \upsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_i \\ \sum y_i \\ \sum z_i \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i\, y_i & \sum x_i\, z_i \\ \sum y_i\, x_i & \sum y_i^2 & \sum y_i\, z_i \\ \sum z_i\, x_i & \sum z_i\, y_i & \sum z_i^2 \end{vmatrix}$$

と置いて

$$\lambda = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \sum x_i & \sum x_i\, y_i & \sum x_i\, z_i \\ \sum y_i & \sum y_i^2 & \sum y_i\, z_i \\ \sum z_i & \sum z_i\, y_i & \sum z_i^2 \end{vmatrix}$$

$$\mu = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i & \sum x_i\, z_i \\ \sum y_i\, x_i & \sum y_i & \sum y_i\, z_i \\ \sum z_i\, x_i & \sum z_i & \sum z_i^2 \end{vmatrix}$$

$$\nu = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i\, y_i & \sum x_i \\ \sum y_i\, x_i & \sum y_i^2 & \sum y_i \\ \sum z_i\, x_i & \sum z_i\, y_i & \sum z_i \end{vmatrix}$$

この平面を $\boldsymbol{r}\ \rho_{\mathbf{0}} = \rho$ （ $\rho_{\mathbf{0}} = \rho_{\mathbf{0}} \left(\rho_{\mathbf{0}x}\ \rho_{\mathbf{0}y}\ \rho_{\mathbf{0}z} \right)$ ）で表わしたとして

$\left(\frac{1}{\lambda}\ \ 0\ \ 0 \right) \left(0\ \ \frac{1}{\mu}\ \ 0 \right) \left(0\ \ 0\ \ \frac{1}{\nu} \right)$は平面上の点だから

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \end{pmatrix} \rho_0 = \rho$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\mu} & 0 \end{pmatrix} \rho_0 = \rho$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{\nu} \end{pmatrix} \rho_0 = \rho$$

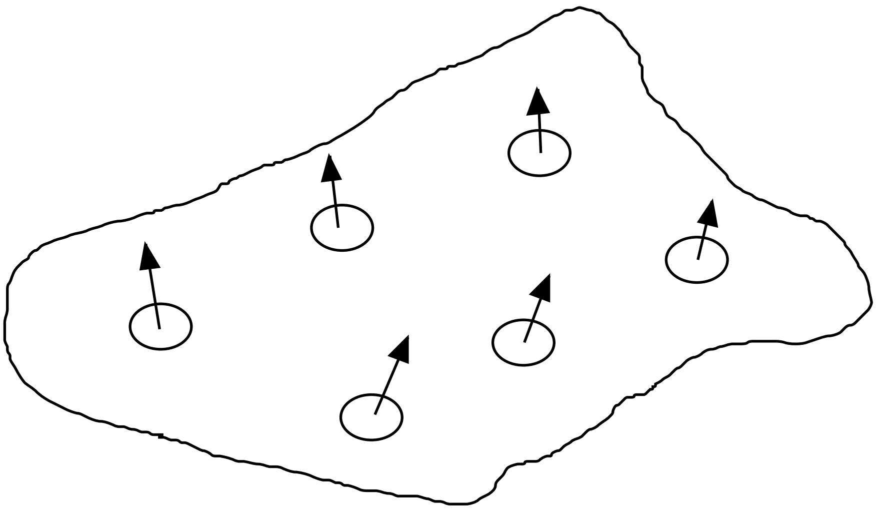
また $\rho_{0x}{}^2 + \rho_{0y}{}^2 + \rho_{0z}{}^2 = 1$　　　　よって

$$\frac{\rho_{0x}}{\lambda} = \rho \quad \frac{\rho_{0y}}{\mu} = \rho \quad \frac{\rho_{0z}}{\nu} = \rho$$

$(\lambda \rho)^2 + (\mu \rho)^2 + (\nu \rho)^2 = 1$　これより

$$|\rho| = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}}$$

$$\rho_0 = \begin{pmatrix} \rho_{0x} & \rho_{0y} & \rho_{0z} \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \lambda & \mu & \nu \end{pmatrix}$$



ニードルマップ